Zadanka rozgrzewkowe

piątek, 12 października 2007

1. Piotrek startuje w wielu konkursach ACM-owych z bardzo dobrymi wynikami. Jednym z bardzo ważnych elementów jego strategii jest zapeszanie i denerwowanie przeciwników piszących na tej samej sali co on. W tym celu skonstruował sobie duży licznik, na którym ogłasza innym, ile zadań już zrobił, ale, aby jeszcze bardziej objawić geniusz twórcy, licznik pokazuje liczbę zrobionych zadań w systemie o podstawie 2. Budowa licznika nie jest bardzo skomplikowana - jest to rządek wielu tabliczek, każda ma z jednej strony narysowaną jedynkę, a z drugiej zero, każdą tabliczkę można niezależnie od innych przekręcić o 180 stopni. Tabliczki te reprezentują liczbę w systemie binarnym. Na początku konkursu licznik ustawiony jest na zero (czyli wszystkie tabliczki pokazują zero). Piotrek w momencie jak zrobi zadanie triumfalnie przestawia licznik na nową wartość, nie kręcąc bez potrzeby tabliczkami, choć czasem musi całkiem sporo tabliczek przekręcić.

Piotrek niestety w czasie ostatniego konkursu nie zajął pierwszego miejsca, mimo że zrobił całkiem sporo zadań. Obawia się, że jest to spowodowane tym, że za dużo czasu spędził na przekręcaniu tabliczek. Piotrek w czasie konkursu zrobił n zadań. Ile razy wykonał przekręcenie pojedynczej tabliczki? (włącznie z ostatnim rozwiązanym zadaniem)

2. Dana jest liczba $n \leqslant 100\,000$ i liczby $a, b \leqslant 1\,000\,000\,000$. Znajdź liczby (w przypadku wielu rozwiązań podać jedno) $1 \leqslant x, y \leqslant n$, spełniające warunki: $x\ AND\ y = x$ oraz $(ax + by)\ XOR\ (ay + bx) = x$.

3. Mamy $1 \leqslant n \leqslant 500\,000$ warstw ocieplajajacych, kazda o stopniu grzania a_i. Chcemy je w jakiejs kolejnosci polozyc na scianie. Sciana wtedy bedzie ocieplana z sila $\sum_{i=1}^{n-1} |a_{\pi(i)} - a_{\pi(i+1)}|$, gdzie $\pi(i)$ to numer i-tej warstwy. Jaka maksymalna sile ocieplania otrzymamy?

4. Kajak utrzymuje $1 \leqslant k \leqslant 1\,000\,000\,000$ kilogramow. Mamy $1 \leqslant n \leqslant 500\,000$ kolesi, kazdy ma swoja wage w_i. Kajaki sa dwuosobowe, suma masy kolesi w kajaku musi nie przekraczac k. Ile musimy miec kajakow na tych kolesi?

5. Mamy miedzę o długości $M \leqslant 1\,000\,000\,000$. Na tej miedzy mieszka $n \leqslant 100\,000$ kun, każda ma norę w odległości $0 \leqslant x_i \leqslant M$ od początku miedzy, $x_i < x_j$ jeśli $i < j$. Mamy $1 \leqslant k \leqslant n$ desek, chcemy tak położyć deski na miedzy, by przykryć wszystkie nory kun. Jaka musi być minimalna sumaryczna długość desek?

6. Dany jest ciąg $a_0 = 1$, $a_{n+1} = (a_n^2 + 17)\ mod\ 1\,000\,003$ oraz liczba $N \leqslant 1\,000\,000\,000$. Policz a_N.

7. Dla ciągu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ inwersją nazywamy taką parę indeksów (i, j), że $i < j$ i $a_i > a_j$. Mając dany ciąg a_i o $n \leqslant 500\,000$ elementach, policz liczbę inwersji tego ciągu.

8. W Bajtocji dostępne są tylko monety o nominałach $p, q \leqslant 1\,000\,000\,000$. Jakiej największej kwoty nie da się wydać tymi monetami?

9*. W Bajtocji dostępne są tylko monety o nominałach $p, q \leqslant 1\,000\,000\,000$. Ilu kwot dodatnich nie da się wydać tymi monetami?

10. Wzdłuż ulicy Długiej jest $n \leqslant 500\,000$ budynków, każdy ma szerokość jednej yetistopy. Budynek i-ty z kolei ma wysokość a_i yetistóp. Chcemy powiesić na tych budynkach plakat prostokątny tak, by jego pole było jak największe. Jakie będzie to pole?

11. Dana jest tablica $m \times n$, $m, n \leqslant 1\,000$, wypełniona plusami i minusami. Operacją jest zamiana wszystkich znaków w jednym wierszu lub jednej kolumnie. Czy da się zrobić same plusy?

12. Jak w zadaniu 11, ale są dane liczby $r \leqslant m, c \leqslant n$, i operacją jest zamiana znaków w dowolnym prostokącie $r \times c$.

13. Jest most, jest jedna latarka i n kolesi. Koleś o numerze i przechodzi przez most w czasie a_i, z latarką na raz może iść co najwyżej 2 kolesi, wszyscy chcą przejść. Ile minimalnie czasu zajmie im przechodzenie?

14. Fredek odwiedza $n \leqslant 500\,000$ przyjaciół. Przyjaciele mieszkają na okręgu, między przyjacielem i a $i+1$ jest odległość na okręgu d_i metrów. U przyjaciela i można zatankować a_i litrów, na przebycie x metrów Fredkowi potrzeba x litrów. Skąd ma zacząć, by przejść cały okrąg (ma też wrócić do miejsca startu?

15. Mamy odważniki o masie $1, 3, 3^2, \ldots, 3^n$, każdy po jednym, i przedmiot o masie x nie większej niż suma mas wszystkich odważników. Podać rozkład odważników na szalach potwierdzający jego masę.

16. Mamy dany ciąg n elementów, składający się z 0, 1 i -1. Ile minimalnie zamian musimy wykonać, by go posortować?

17. Mamy dany zbiór $n \leqslant 100\,000$ liczb i liczbę $1 \leqslant c \leqslant n$. Znajdź niepusty podzbiór tego zbioru o sumie podzielnej przez c

A. Posortować 5 liczb używając co najwyżej 7 porównań.

B. Z ciągu n liczb wybrać minimum i maksimum używając co najwyżej $\frac{3}{2}n$ porównań.